

УДК 539.3

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю.В. Захарчук

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

## DEFORMATION OF THE CIRCULAR THREE-LAYER PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER

Yu.V. Zakharchuk

*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Рассмотрена задача о симметричном изгибе несимметричной по толщине упругой круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом наполнителе учтены поперечный сдвиг, радиальные перемещения и прогиб, который изменяется линейно по толщине. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Постановка краевой задачи в перемещениях приведена в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ .

**Ключевые слова:** *круговая трехслойная пластина, упругость, сжимаемый наполнитель.*

The problem of symmetric bending of a three-layer elastic plate with a compressible filler asymmetrical in thickness is considered. Kirchhoff's hypotheses are accepted for thin bearing layers. In a relatively thick aggregate, the transverse shear, radial displacements and deflection, which vary linearly in thickness are taken into account. The differential equations of equilibrium in the effort are obtained using the Lagrange variational method. The setting of the boundary value problem in the displacements is given in the cylindrical coordinate system.

**Keywords:** *circular three-layer plate, elasticity, compressible filler.*

### Введение

В последнее время значительное возрос спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в авиа-, ракето-, машино-, приборо- и судостроении, добыче и транспортировке энергоносителей. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Еще одна группа слоев предназначена для защиты от тепловых, химических, радиационных и других нежелательных воздействий. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды, создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач приведены в монографиях [1]–[4]. Исследования деформирования

слоистых упругопластических систем при циклических нагружениях проведены в публикациях [5]–[8]. Результаты, связанные с колебаниями круговых трехслойных элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [9]–[15]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем рассмотрено в работах [16]–[19].

Следует отметить, что и деформирование и колебания трехслойных круговых пластин исследовались только в случае несжимаемого наполнителя. Это вызвано определенными математическими трудностями при постановке и решении соответствующих краевых задач. Однако, учет сжимаемости наполнителя в большей степени адекватно описывает деформирование трехслойных элементов конструкций. Поэтому здесь приведена постановка краевой задачи, включающая систему дифференциальных уравнений равновесия и граничные условия, о деформировании круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем.

### 1 Перемещения и деформации

Рассмотрим упругую круговую трехслойную пластину со сжимаемым-растягиваемым наполнителем (рисунок 1.1). Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Систему координат свяжем со срединной плоскостью наполнителя. В тонких

несущих слоев с толщинами  $h_1 \neq h_2$  справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r)$ , обжатие по толщине принимается линейным.

На внешний слой стержня действует симметричная распределенная нагрузка с вертикальной  $q = q(r)$  и горизонтальной  $p = p(r)$  составляющими. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ( $\psi = 0, v = 0$  при  $r = r_0$ ). Через  $w(r)$  и  $u(r)$  обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя,  $v(r)$  – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через  $h_k$  толщину  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя), при этом  $h_3 = 2c$ .

Продольные и поперечные перемещения в слоях  $u^{(k)}(r, z)$  и  $w^{(k)}(r, z)$  можно выразить через четыре искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$  следующими соотношениями:

– в несущих слоях 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}c), \quad w^{(1)} = w(r) + v(r)c, \\ (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - z(w_{,r} - v_{,r}c), \quad w^{(2)} = w(r) - v(r)c, \\ (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

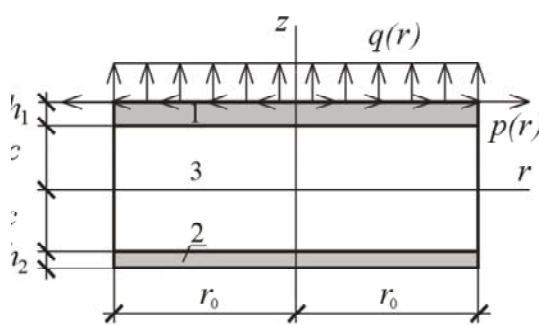
– в заполнителе 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z(w_{,r} + v_{,r}z), \\ w^{(3)}(r, z) = w(r) + v(r)z, \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1.1)$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1.1), используя соотношения Коши:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}c), \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}c)), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$



$$(c \leq z \leq c + h_1), \\ \varepsilon_r^{(2)} = u_{,r} - c\psi_{,r} - z(w_{,rr} - v_{,rr}c), \\ \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - z(w_{,r} - v_{,r}c)), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\ (-c - h_2 \leq z \leq -c), \\ \varepsilon_r^{(3)} = u_{,r} + z\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}z), \\ \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - z(w_{,r} + v_{,r}z)), \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}(\psi - v_{,r}z), \\ \varepsilon_z^{(3)} = v, \quad (-c \leq z \leq c). \quad (1.2)$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$  выражены перемещения (1.1) и деформации (1.2) в круговой пластине со сжимаемым заполнителем.

### 2 Внутренние усилия и уравнения равновесия

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \quad Q^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz, \quad M_{rz}^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} z dz, \\ T_z^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_z^{(3)} dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \\ D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} - M_\alpha^{(2)}), \quad (2.1)$$

где интегралы берутся по толщине  $k$ -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где  $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$  – суммарная вариация работы внешних сил  $\delta A_1$  и контурных усилий  $\delta A_2$ ;  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости.

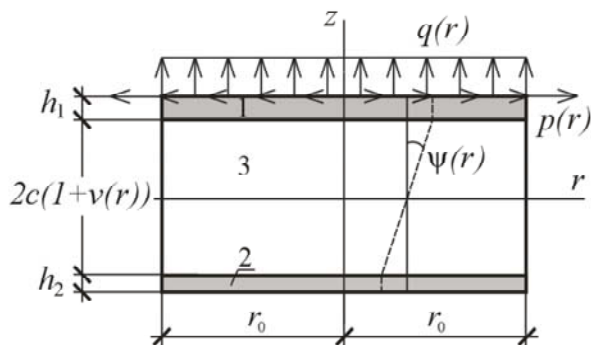


Рисунок 1.1 – Схема деформирования круговой трехслойной пластины

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет:

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w + p\delta u) r dr d\varphi. \quad (2.2)$$

Вариация работы контурных усилий  $T_r^0$ ,  $H_r^0$ ,  $M_r^0$ ,  $Q^0$ ,  $D_r^0$ ,  $M_{rz}^0$ :

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w + D_r^0 \delta v_{,r} + M_{rz}^0 \delta v) d\varphi. \quad (2.3)$$

Вариация работы сил упругости:

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz + 2 \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} \delta \varepsilon_{rz}^{(3)} dz + \int_{-c}^c \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] r dr d\varphi, \quad (2.4)$$

где двойной интеграл распространен по срединной поверхности наполнителя  $S$ .

Вариации перемещений в слоях следуют из (1.1), деформаций – из (1.2). Рассмотрим суммарный интеграл по толщине слоев, входящий в виртуальную работу сил упругости (2.4). Для радиальных составляющих будет:

$$\begin{aligned} & \int_{h_1} \sigma_r^{(1)} \delta \varepsilon_r^{(1)} dz = \\ & = \int_{h_1} \sigma_r^{(1)} [\delta u_{,r} + c \delta \psi_{,r} - z(\delta w_{,rr} + \delta v_{,rr} c)] dz = \\ & = T_r^{(1)} \delta u_{,r} + c T_r^{(1)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(1)} \delta w_{,rr} - c M_r^{(1)} \delta v_{,rr}, \\ & \int_{h_2} \sigma_r^{(2)} \delta \varepsilon_r^{(2)} dz = \\ & = \int_{h_2} \sigma_r^{(2)} [\delta u_{,r} - c \delta \psi_{,r} - z(\delta w_{,rr} - \delta v_{,rr} c)] dz = \\ & = T_r^{(2)} \delta u_{,r} - c T_r^{(2)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(2)} \delta w_{,rr} + c M_r^{(2)} \delta v_{,rr}, \\ & \int_{h_3} \sigma_r^{(3)} \delta \varepsilon_r^{(3)} dz = \\ & = \int_{h_3} \sigma_r^{(3)} [\delta u_{,r} + z \delta \psi_{,r} - z(\delta w_{,rr} + \delta v_{,rr} z)] dz = \\ & = T_r^{(3)} \delta u_{,r} + M_r^{(3)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(3)} \delta w_{,rr} - S_r^{(3)} \delta v_{,rr}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем интегралы для тангенциальных составляющих. Просуммировав, имеем:

$$\delta W = \iint_S \left[ T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr} - D_r \delta v_{,rr} + Q^{(3)} \delta \psi - M_{rz}^{(3)} \delta v_{,r} + T_z^{(3)} \delta v + \frac{1}{r} (T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \psi - M_\varphi \delta w_{,r} - D_\varphi \delta v_{,r}) \right] r dr d\varphi, \quad (2.5)$$

где внутренние усилия  $T_\alpha$ ,  $M_\alpha$ ,  $H_\alpha$ ,  $D_\alpha$ ,  $Q^{(3)}$ ,  $M_{rz}^{(3)}$  и  $T_z^{(3)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) введены соотношениями (2.1).

Вариацию потенциальной энергии проинтегрируем в полярной системе координат. Подынтегральное выражение в (2.5) можно разбить на два интеграла, вынося в первом из них операцию дифференцирования за общую скобку, а во втором – группируя слагаемые при одинаковых виртуальных перемещениях:

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \left\{ r T_r \delta u + r H_r \delta \psi - r M_r \delta w_{,r} + \right.$$

$$\left. + [(r M_r)_{,r} - M_\varphi] \delta w - r D_r \delta v_{,r} + [(r D_r)_{,r} - r M_{rz}^{(3)} - D_\varphi] \delta v \right\} d\varphi -$$

$$\begin{aligned} & - \int \int \left\{ [(r T_r)_{,r} - T_\varphi] \delta u + [(r H_r)_{,r} - H_\varphi - r Q^{(3)}] \delta \psi + \right. \\ & \left. + [(r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r}] \delta w + \right. \\ & \left. + [(r D_r)_{,rr} - r T_z^{(3)} - D_{\varphi,r} - (r M_{rz}^{(3)})_{,r}] \delta v \right\} d\varphi dr. \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение к работе внешних и контурных усилий (2.2), (2.3) и потребуем выполнение этого равенства при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомым функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой трехслойной пластинки со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q^{(3)} = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r} - M_{rz}^{(3)}) - T_z^{(3)} - M_{rz,r} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

На границе  $r = r_0$  должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^0, \\ D_r &= D_r^0; \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) - M_{rz}^{(3)} = M_{rz}^0. \end{aligned}$$

### 3 Постановка краевой задачи в перемещениях

Выразим внутренние обобщенные усилия (2.1) через перемещения. Для этого напряжения в слоях рассматриваемой пластины представим через деформации с помощью закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \sigma^{(k)} \delta_{ij}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}, \\ \sigma^{(k)} &= K_k \theta^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad \varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)}), \\ & (i, j = r, \varphi, z; k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в (3.1) будут

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}), \\ \varepsilon_r^{(k)} &= \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)}, \\ \varepsilon_\varphi^{(k)} &= \varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(3)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\ \vartheta_r^{(3)} &= \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \\ \vartheta_\varphi^{(3)} &= \varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \\ \vartheta_z^{(3)} &= \varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)}, \\ \vartheta_{rz}^{(3)} &= \varepsilon_{rz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Компоненты тензора напряжений связаны с деформациями (3.2) законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= 2G_k \vartheta_r^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij} = \\ &= 2G_k \left( \frac{2}{3} \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3} \varepsilon_\varphi^{(k)} \right) + 3K_k \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \\ &= \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right) \varepsilon_r^{(k)} + \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right) \varepsilon_\varphi^{(k)} = \\ &= K_k^+ \varepsilon_r^{(k)} + K_k^- \varepsilon_\varphi^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \\ \sigma_r^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3} \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_z^{(3)} \right) + \\ &\quad + 3K_3 \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \varepsilon_r^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3} G_3 \right) (\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= K_3^+ \varepsilon_r^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\ \sigma_\varphi^{(k)} &= 2G_k \left( \frac{2}{3} \varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3} \varepsilon_r^{(k)} \right) + 3K_k \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \\ &= \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right) \varepsilon_\varphi^{(k)} + \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right) \varepsilon_r^{(k)} = \\ &= K_k^+ \varepsilon_\varphi^{(k)} + K_k^- \varepsilon_r^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \\ \sigma_\varphi^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3} \varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_z^{(3)} \right) + \\ &\quad + 3K_3 \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \varepsilon_\varphi^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3} G_3 \right) (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= K_3^+ \varepsilon_\varphi^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\ \sigma_z^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3} \varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_\varphi^{(3)} \right) + \\ &\quad + 3K_3 \frac{1}{3} (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \varepsilon_z^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3} G_3 \right) (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)}) = \\ &= K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3} G_k, \\ K_k^- &= K_k - \frac{2}{3} G_k. \end{aligned}$$

Используя соотношения (3.1), (3.2), (3.3), выразим обобщенные внутренние усилия и моменты через искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$ . Подставив их в систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (2.6), получим в итоге систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в круглой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_5 v_{,r}) + 2cK_3^- v_{,r} &= -p, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r} - a_7 v_{,r}) - 2cG_3 \psi &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_8 v_{,r}) &= -q, \\ L_3(a_3 u + a_7 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{2}{3} c^3 \left( v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) \left( 2K_3 - \frac{1}{3} G_3 \right) - \\ - 2cK_3^+ v - 2cK_3^- \left( u_{,r} + \frac{u}{r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь коэффициенты  $a_i$  и дифференциальные операторы  $L_2$  (оператор Бесселя),  $L_3$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \\ a_4 &= c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \\ a_5 &= c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_6 &= h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + \\ &\quad + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_7 &= c^2 \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ \right], \\ a_8 &= c \left[ h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ - \right. \\ &\quad \left. - h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ \right], \\ a_9 &= c^2 \left( h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \right. \\ &\quad \left. + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{5} c^3 K_3^+ \right), \\ L_2(g) &\equiv \left( \frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Краевая задача замыкается добавлением к (3.4) кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

В случае свободного контура

$$\psi = v = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0.$$

Следует отметить, что если в системе (3.4) положить  $v(r) \equiv 0$ , то первые три уравнения в ней совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с несжимаемым наполнителем [1]–[7].

Решение полученной системы уравнений в дальнейшем предполагается проводить с помощью программного комплекса Maple либо приближенным методом.

### Заключение

В данной работе показано, что деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем может быть описано с помощью четырех искоемых функций перемещений.

Для нахождения этих функций получена система дифференциальных уравнений и выписаны граничные условия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
3. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
4. Плещачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плещачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
5. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.
6. Gorshkov, A.G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // Mechanics of Solids. – 2001. – Vol. 36, № 1. – P. 64–69.
7. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409–416.
8. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
9. Kuznetsova, E.L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 5, № 3. – P. 359–366. – DOI: 10.3103/S0025654415030127.
10. Старовойтов, Э.И. Колебания круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, В.Д. Кубенко,

Д.В. Тарлаковский // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2009. – № 2. – С. 16–19.

11. Leonenko, D.V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47. – № 1. – P. 111–118.
12. Starovoitov, E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, – № 4. – P. 346–352.
13. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39, № 8. – P. 945–952.
14. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.
15. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.
16. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.
17. Starovoitov, E.I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.
18. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.
19. Леоненко, Д.В. Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д.В. Леоненко, Э.И. Старовойтов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 5. – С. 106–119.

Поступила в редакцию 02.10.17.